



TITLE:

P-進整数環上のHonda Group  $H_{n,m}$  の自己準同形環について  
(数論と調和解析)

AUTHOR(S):

山崎, 洋平

---

CITATION:

山崎, 洋平. P-進整数環上のHonda Group  $H_{n,m}$  の自己準同形環について (数論と調和解析). 数理解析研究所講究録 1974, 222: 71-81

ISSUE DATE:

1974-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105332>

RIGHT:

# $p$ -進整数環上の Honda group

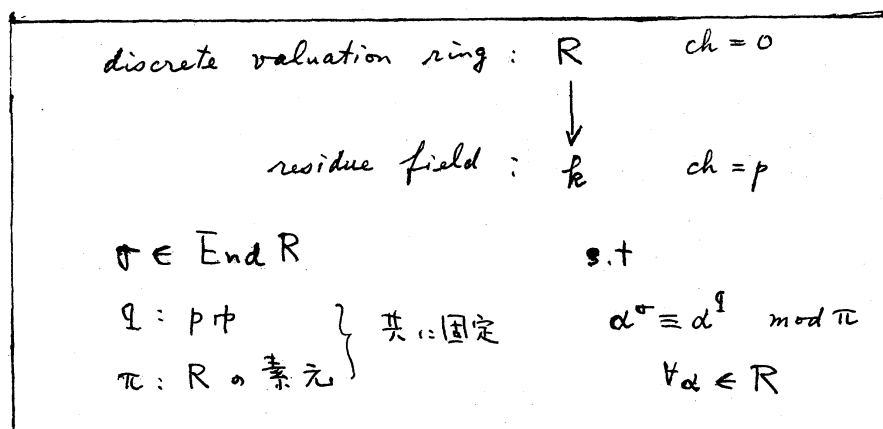
$H_{n,m}$  の自己準同形環について

阪大理 大学院 山崎 洋平

## § 0. 序

“formal group” は J. Dieudonné によ、て導入された概念で、Abel 多様体との関連も深い。彼は [1] ~ [8] に於て、標数  $p > 0$  の代数的曲線（本質的には完全体）上の commutative formal group の理論を展開し、これらの曲線の準同形群を、 $k$  の Witt 環を用いて表わした。また、単純群  $G_{n,0,m}$  を発見し、isogenie による分解定理を得た。

この  $k \leftarrow W(k)$  の構図は T. Honda により



と、とらえ直された。

Honda は、この構図により、"special element" が  $R$  上の commutative formal group を与えること、及び、 $q = p$ 、 $v_{\pi}(p) = 1$  のとき、それらが  $R$  上のすべての commutative formal group を、また、その reduction がすべての  $k$  上の commutative formal group を表し尽くすことを示し、 $R$  上の準同形についていくつかの結果を得た。

本稿では  $G_{n,0,m}$  を  $R$  上に持ち上げた群  $H_{n,m}$  の自己準同形環の決定を紹介する。詳しくは、Yamasaki [10] を見られたい。

## § 1. 定義

$R$  を、1 をもつ可換環。 $X, Y, Z$  を長さ  $n$  の変数縦ベクトル、 $R[[X, Y, Z]]$  を与えられた変数 (vector) に関する  $R$  上の中級数環、 $I = R[[X, Y, Z]]_0$  を定数項が 0 なる元からなる ideal、また  $R[[X, Y, Z]]_0^n$  を、 $I$  の元を成分とする長さ  $n$  の縦ベクトルの全体とする。

Definition.  $R$  上の  $n$  次元 formal group law とは、

$R[[X, Y, Z]]_0^n$  の元  $F$  であ、 $F$  が次の (1), (2) をみたすものをいう。

$$(1) \quad F(X, Y) \equiv X + Y \pmod{\deg 2} \quad \text{即ち} \pmod{I^2}$$

$$(2) \quad F(F(X, Y), Z) = F(X, F(Y, Z))$$

更に  $(3) \quad F(X, Y) = F(Y, X)$

であるとき  $F$  は commutative であるという。

$\Omega$  を長さ  $n$  の変数縦ベクトルの、十分大きな集合とするとき、 $F$  は  $R[[\Omega]]^n$  に群構造を与える。これを formal group というが、以下簡単に、 $F$  を formal group と呼ぶ。本稿では特に commutative なものを扱う。従って、以下使用する

“formal group” は “commutative formal group law” を表わす。(略称 f.g. を用いることも断、しておく)

Definition.  $\varphi \in R[[X]]^{n'}$  が  $n$  次元 f.g.  $F$  から  $n'$  次元 f.g.  $G$  への homomorphism であるとは

$$\varphi \circ F(X, Y) = G(\varphi(X), \varphi(Y))$$

を満たすことをいう。

Definition.  $n' = n$  で、 $\varphi$  が可逆なとき isomorphism という。特に

$$\varphi(X) \equiv X \pmod{\deg 2}$$

のとき strong isomorphism という。

$$\text{Example 1. } F_i(X, Y) = X_i + Y_i - a_i X_i Y_i \quad a_i \in R$$

特に、 $\forall a_i = 0$  のとき additive

$\forall a_i = 1$  のとき multiplicative

という。

Example 2.  $F \in f.g$

$$f \in R[X]_0^m \text{ とき } f(X) \equiv P X \pmod{\deg 2}$$

とする。(但し  $P \in GL(n, R)$ )

$$G(X, Y) = f^{-1}(F(f(X), f(Y)))$$

は  $F$  は isomorphic (特に  $P = I_n$  のときは strongly isomorphic) to  $f.g$  を与える。

Theorem (Honda).  $R$  が  $\mathbb{Q}$ -algebra のとき、すべての  $f.g$  は additive group に同形である。

以下、 $R$  は  $ch=0$  の discrete valuation ring、 $k$  は  $k$  の剰余体で  $ch=p>0$  とし、ある  $p$  かつ  $q(\neq 1)$  に対し、 $R$  の endomorphism  $\sigma$  で次のようなものが与えられているとする。

$$\alpha^\sigma \equiv \alpha^q \pmod{\pi} \quad \forall \alpha \in R$$

ここに、 $\pi$  は固定された素元とする。

$R$  の商体を  $K$  とおき、 $\mathcal{O}_n = M_n(K)_\sigma[[T]]$  は  $M_n(K)$  の行列を係数とする  $T$  の中級数全体に  $TA = A^\sigma T$  ( $A \in M_n(K)$ ) によって、かけ算を入れた環とし、 $\mathcal{O}_n$  を

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i T^i \quad A_i \in M_n(R)$$

なる元からなる部分環とする。

Definition .  $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  に對し

$$X^a = {}^t(x_1^a, \dots, x_n^a)$$

Definition .  $f \in K[X]^n$  ,  $u = \sum A_i T^i \in B_n$

に對し

$$u * f = \sum A_i f^{(i)}(X^{q^i})$$

Definition .  $u \in \mathcal{O}_n$  が special element であるとは

$$u \equiv \pi I_n \pmod{\deg 1} \quad (\text{in } T)$$

なることをいふ。

Theorem ( Honda ).  $u$  が special element ならば

$$f = u^{-1} \pi * \text{id} \quad \text{とある } u \neq 0 \quad (\text{id} : \text{identity})$$

$$F(X, Y) = f^{-1}(f(X) + f(Y))$$

は  $R$  上の  $f, g$  と与える。

$$\begin{array}{ccc} \text{今. } R & \hookrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & & \text{End}_K(F) \\ & & \downarrow \\ & & \text{End}_k(F^{\text{red}}) \end{array}$$

とあるが  $F \cong_k \text{Additive}$  により  $\text{End}_K(F) \cong M_n(K)$  である。

Lemma 1. ( Honda ).

$$\text{End}_R(F) \cong \mathcal{O}_n \cap u M_n(R) u^{-1} \cong \{A \in M_n(R) \mid u A u^{-1} \in \mathcal{O}_n\}$$

Definition,  $u = \pi(I_n - P^{-1}N_+T - P^{-1}N_-^{-1}T^{m+1})$  から  
 $f = u^{-1}\pi * id$ ,  $H = f^{-1}(f(\cdot) + f(\cdot))$  とし得られた  $f, g$  は  
 $(n, m)$  型の Honda group とし,  $H_{n, m}$  と書く。

$$\left( \begin{array}{l} \text{但し} \quad P = \begin{bmatrix} \pi^{\sigma^{n-1}} & 0 \\ 0 & \pi^{\sigma} \\ & \pi \end{bmatrix} \quad N_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \\ \\ N_- = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{と置き} \quad m \geq 1 \text{ とする。} \\ \\ \text{また便宜上, } n=1 \text{ のとき } N_+ = 0 \quad N_-^{-1} = I_1 \text{ とする。} \end{array} \right.$$

## § 2. $\text{End}_R(H_{n, m})$

$\text{End}_R(\quad)$  を調べることは, Lemma 1. により  $uAu^{-1} \in \mathcal{O}_n$   
 なる性質を調べることに帰するが, これは  $\pi^{-1}uA u^{-1}\pi \in \mathcal{O}_n$  と  
 同値である。従って, まず,  $u^{-1}\pi$  を知る必要である。  
 今,  $U = P^{-1}N_+T$ ,  $V = P^{-1}N_-^{-1}T^{m+1}$ ,  $\sigma^{m+n} = \tau$  とおくと

$$\begin{aligned} u^{-1}\pi &= (\pi^{-1}u)^{-1} = (I_n - (U+V))^{-1} \\ &= I_n + (U+V) + (U^2+UV+VU+V^2) + \cdots \end{aligned}$$

であるが,  $\beta \in K$  に対し  $B = \begin{bmatrix} \beta^{\sigma^{n-1}} & 0 \\ 0 & \beta^{\sigma} \\ & \beta \end{bmatrix}$  とおくと

$$(N_+ T) B = B (N_+ T)$$

$$(N_-^{-1} T^{m+1}) B = B^T (N_-^{-1} T^{m+1})$$

また、
$$(N_-^{-1}) N_+^k (N_-^{-1}) = \delta_{n-1, k} N_-^{-1}$$

なることに注目すれば次の式が得られる。

Theorem. 
$$u^{-1} \pi = \sum_{\substack{\lambda \geq 0 \\ |k| < n \\ \lambda(m+n)+k \geq 0}} W_k^{(\lambda)}$$

ここに、 $W_k^{(0)} = U^k$  であり、 $\lambda \geq 1$  では、

$$W_k^{(\lambda)} = \sum_{i+j=n-1+k} U^i V (U^{n-1} V)^{\lambda-1} U^j$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \begin{bmatrix} & & \overset{1+k}{*} & & \\ & & \circ & & \\ & & & & * \\ & \circ & & & \\ & & & & \end{bmatrix} T^{\lambda(n+m)+k} & k \geq 0 \\ &= \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & \circ & \\ & & & & \\ \overset{1-k}{*} & & & & \\ & \circ & & & * \end{bmatrix} T^{\lambda(n+m)+k} & k < 0 \end{aligned} \right.$$

また、 $\nu_\pi(*) = -(\lambda n + k)$  が、すべての  $*$  について成立する。

我々は  $\pi^{-1} u A u^{-1} \pi = (I_n - (U+V)) A \geq W_k^{(\lambda)}$  が  $\mathcal{O}_n$  の元となる条件を知りたい。その為、 $A$  を次のように表わす。



$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{ij} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$$

これにより,  $(I_n - (U+V))A$  は次のようになる。

$$(I_n - (U+V)) \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sigma_i - \pi^{-\sigma^{n-i}} \sigma_{i+1}^\sigma T \\ \vdots \\ \sigma_n - \pi^{-1} \sigma_1^{\sigma^{m+1}} T^{m+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} (i & i < n \\ \\ (n \end{matrix}$$

一方,  $W_k^{(\lambda)}$  は  $\lambda(n+m) + k$  次の monomial であるから,

$\sum W_k^{(\lambda)}$  の表示に於て,  $|k_0| \leq 1$  のとき,  $\lambda(n+m) + k_0$  次のものは  $W_{k_0}^{(\lambda)}$  に限る。これに注意して,  $\pi^{-1}U A U^{-1}\pi$  の  $\lambda(m+n)$  次、及び  $\lambda(m+n) + 1$  次の項の第  $i$  行をみると (但し  $i < n$ )、

$$(\star)_i \quad \left. \begin{aligned} \sigma_i W_1^{(\lambda)} &\equiv \pi^{-\sigma^{n-i}} \sigma_{i+1}^\sigma W_0^{(\lambda)} \\ \sigma_i W_0^{(\lambda)} &\equiv \pi^{-\sigma^{n-i}} \sigma_{i+1}^\sigma W_{-1}^{(\lambda)} \end{aligned} \right\} \text{mod } R$$

が得られる。こゝで次の Lemma が必要になる。

$$\begin{aligned} \text{Lemma 2.} \quad i) \quad W_k^{(\lambda)} &= W_{k-1}^{(\lambda)} U + U^{n-1+k} V (U^{n-1} V)^{\lambda-1} \\ &= U W_{k-1}^{(\lambda)} + (V U^{n-1})^{\lambda-1} V U^{n-1+k} \quad \lambda \geq 1 \\ ii) \quad W_{k+1}^{(\lambda)} &= U W_{k-1}^{(\lambda)} U \quad k \geq 0, \lambda \geq 1 \end{aligned}$$

$W_{k_0}^{(\lambda)}$  の成分は  $\lambda$  が増大するに従って valuation が  $-\infty$  に向う。これと, Lemma 2. をあわせてみると  $(\star)_i$  は次のよう

になる。

$$d_{in} = 0$$

$$d_{i+1,1}^{\sigma} = 0$$

$$\pi^{-\sigma^{n-i}} d_{i+1,j+1}^{\sigma} = \pi^{-\sigma^{n-j}} d_{i,j}$$

これを総合すると

$$\begin{pmatrix} \alpha^{\sigma^{n-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & \alpha^{\sigma} & 0 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{となる。}$$

これに  $\pi^{-1} u A u^{-1} \pi$  の第  $n$  行の条件  $(\star)_n$  を加えると

$$(d^{\sigma^{n-1}})^{\sigma^{m+1}} = \alpha^{\tau} = \alpha$$

が必要となる。

$$\text{一方、} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha^{\sigma^{n-1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{\sigma} & 0 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^{\tau} = \alpha \quad \text{であれば、}$$

$A$  は  $P^{-1}$ ,  $N_+ T$ ,  $N_-^{-1} T^{m+1}$  と可換であり、従って、 $U$ ,  $V$  と可換である。従って

$$\begin{aligned} \pi^{-1} u A u^{-1} \pi &= (I_n - (U+V)) A u^{-1} \pi = A (I_n - (U+V)) u^{-1} \pi \\ &= A \in \mathcal{O}_n \end{aligned}$$

である。即ちこれが必要十分条件である。

$$\begin{aligned} \text{End}_R(H_{n,m}) &\simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^{\sigma^{n-1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{\sigma} & 0 \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \in M_n(R) \mid \alpha^{\tau} = \alpha \right\} \\ &\simeq \{ \alpha \in R \mid \alpha^{\tau} = \alpha \} \end{aligned}$$

特に  $R \supset \mathbb{Z}_p$  のとき (簡単には complete のとき、更には  $p$ -進整数環のとき)、 $\{\alpha \in R \mid \alpha^p = \alpha\}$  を調べて、次を得る。

Theorem.  $\text{End}_R(H_{n,m}) \cong \mathbb{Z}_p[W', \pi']$

ここに、 $W'$  は  $R$  に属する、1 の  $q^{m+n} - 1$  乗根のうち order が最大のもので、 $\pi'$  は  $\pi$ -stable な  $R$  の元 (例えば  $p$ ) のうち valuation が minimal positive なもので、 $\mathbb{Z}_p[W']$  上 Eisenstein polynomial で定義される。

#### 参考文献

- [1] J. Dieudonné, Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$ ,  
Comm. Math. Helv. 28 (1954) 87-118.
- [2] J. Dieudonné, Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic  $p > 0$  (II),  
Amer. J. Math. 77 (1955) 218-244.
- [3] J. Dieudonné, Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$  (III),  
Math. Z. 63 (1955) 53-75.

- [4] J. Dieudonné, Lie groups and Lie hyperalgebras  
over a field of characteristic  $p > 0$  (IV),  
Amer. J. Math. 77 (1955) 429-452.
- [5] J. Dieudonné, Groupes de Lie et hyperalgèbres  
de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$  (V),  
Bull. Soc. Math. France 84 (1956) 207-239.
- [6] J. Dieudonné, Lie groups and Lie hyperalgebras  
over a field of characteristic  $p > 0$  (VI),  
Amer. J. Math. 79 (1957) 331-388.
- [7] J. Dieudonné, Groupes de Lie et hyperalgèbres,  
de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$  (VII),  
Math. Ann. 134 (1957) 114-133.
- [8] J. Dieudonné, Lie groups and Lie hyperalgebras  
over a field of characteristic  $p > 0$  (VIII),  
Amer. J. Math. 80 (1958) 740-772.
- [9] T. Honda, On the theory of commutative  
formal groups,  
J. Math. Soc. Japan 22 (1970) 213-246
- [10] Y. Yamasaki, On the endomorphism rings of  
Honda groups  $H_{n,m}$  over  $\mathfrak{p}$ -adic integer rings,  
to appear.